Introdução aos Processos Estocásticos

Luiz Renato Fontes

PMS — Estrutura de classes

Seja $(X_t) \sim \text{PMS}(\cdot, \mathbf{Q})$. Dados $x, y \in \mathcal{S}$, dizemos que x *alcança* y, notação: $x \to y$, se

$$\mathbb{P}_x(X_t = y \text{ para algum } t \geq 0) > 0,$$

e que x *se comunica com* y, notação: $x \leftrightarrow y$, se $x \to y$ e $y \to x$.

Noções de *classe de comunicação, classe fechada, estado absorvente* e *irredutibilidade*, em termos das noções do parágrafo anterior, são as mesmas do que para as CM's (em tempo discreto).

Teorema 1

Para $x \neq y \in \mathcal{S}$, são equivalentes as seguintes afirmações:

(i) $x \to y$;

(ii) $x \to y$ na cadeia de saltos;

(iii) $q_{x_0 x_1}, \ldots, q_{x_{n-1} x_n} > 0$ p/algum $n \geq 1$ e $x = x_0, \ldots, x_n = y$;

(iv) $P_{xy}(t) > 0$ para todo $t > 0$;

(v) $P_{xy}(t) > 0$ para algum $t > 0$.

Irredutibilidade/Medidas invariantes

Obs. $\mathbf{Q}$ é irredutível se e somente se $\mathbf{\Pi}$, a matriz de saltos respectiva, for irredutível.

Def. Dadas uma medida λ e uma Q-matriz $\mathbf{Q}$ em $\mathcal{S}$, dizemos que λ é invariante para $\mathbf{Q}$ se $\lambda\mathbf{Q} = \mathbf{0}$.

Teorema 2

Seja $\mathbf{Q}$ uma Q-matriz e $\mathbf{\Pi}$ a matriz de saltos respectiva. São equivalentes:

(i) λ é invariante para $\mathbf{Q}$;

(ii) $\mu\mathbf{\Pi} = \mu$, onde $\mu_x \equiv \lambda_x q_x$ (μ é invariante para $\mathbf{\Pi}$).

Recorrência

Def. Seja $\mathbf{Q}$ uma Q-matriz em $\mathcal{S}$ e (X_t) o PMS associado. Seja

$$\mathcal{T}_x = \inf\{t \geq S_1 : X_t = x\}$$

o tempo de primeira passagem de (X_t) por $x \in \mathcal{S}$.

Diremos que $x \in \mathcal{S}$ é *recorrente* se $q_x = 0$ *ou* $\mathbb{P}_x(\mathcal{T}_x < \infty) = 1$; do contrário, x será dito *transitório*.

Teorema 3

Valem as seguintes afirmações:

(i) Se $x \in \mathcal{S}$ for recorrente para (Y_n), então x é recorrente para (X_t);

(ii) Se $x \in \mathcal{S}$ for transitório para (Y_n), então x é transitório para (X_t);

(iii) Recorrência e transitoriedade são propriedades de classe.

Se $q_x = 0$ *ou* $m_x := \mathbb{E}_x(\mathcal{T}_x) < \infty$, então diremos que x é *recorrente positivo*.

Se x for recorrente, mas não recorrente positivo, então dizemos que é *recorrente nulo*.

Recorrência positiva/Distribuição invariante/Explosividade

Teorema 4

Seja $\mathbf{Q}$ seja uma Q-matriz irredutível. São equivalentes:

(i) Todo estado $x \in \mathcal{S}$ é recorrente positivo;

(ii) Algum estado $x \in \mathcal{S}$ é recorrente positivo;

(iii) $\mathbf{Q}$ *é não explosiva* e tem uma distribuição invariante λ.

Além disso, quando (iii) valer, teremos $\lambda_x = \dfrac{1}{q_x m_x}$.

Teorema 5

Seja $(X_t) \sim \text{PMS}(\mu, \mathbf{Q})$. Então (X_t) é não explosivo se

(i) $\mathcal{S}$ for finito; ou

(ii) $\sup_{x \in \mathcal{S}} q_x < \infty$; ou

(iii) $X_0 = x$ e x for recorrente para (Y_n).

Convergência

Teorema 6

Suponha que $\mathbf{Q}$ seja uma Q-matriz irredutível e recorrente em $\mathcal{S}$, (X_t) o PMS associado, com $\mathbf{P}(t) = (\mathbb{P}_x(X_t = y))_{x,y\in\mathcal{S}}$, $t \geq 0$, e seja λ uma medida em $\mathcal{S}$. São equivalentes:

(i) $\lambda\mathbf{Q} = 0$;

(ii) $\lambda\mathbf{P}(s) = \lambda \; \forall \; s \geq 0$.

Obs. Nesse contexto, se λ for uma *distribuição* invariante para $\mathbf{Q}$, e $X_0 \sim \lambda$, então $X_t \sim \lambda$ para todo $t > 0$.

Teorema 7 (Convergência ao equilíbrio)

Seja $\mathbf{Q}$ uma Q-matriz irredutível e não explosiva, com distribuição invariante λ. Então para todo $x, y \in \mathcal{S}$

$$\mathbb{P}_x(X_t = y) \to \lambda_y \text{ quando } t \to \infty.$$

Obs. O trecho azul pode ser substituído por recorrente positiva, adicionando-se ao final: onde λ é a distribuição invariante estipulada no Teorema 4.

Convergência (cont.)

Teorema 8 (Caso irredutível geral)

Seja $\mathbf{Q}$ uma Q-matriz irredutível e ν uma distribuição qualquer em $\mathcal{S}$.

$$\mathbb{P}(X_t = y) \to \frac{1}{q_y m_y} \text{ quando } t \to \infty \ \forall \ y \in \mathcal{S},$$

onde $m_y = \mathbb{E}_y(\mathcal{T}_y)$.

Teorema 9 (Teorema Ergódico)

Seja $\mathbf{Q}$ uma Q-matriz irredutível, e ν uma distribuição qualquer em $\mathcal{S}$, e suponha que $(X_t) \sim \text{PMS}(\nu, \mathbf{Q})$. Então para todo $x \in \mathcal{S}$

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{1}\{X_s = x\}\, ds \xrightarrow{\text{qc}} \frac{1}{m_x q_x} \text{ quando } t \to \infty, \tag{5}$$

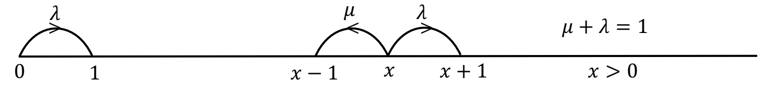
onde $m_x = \mathbb{E}_x(\mathcal{T}_x)$. Além disto, no caso recorrente positivo, se $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ for limitada, temos que

$$\frac{1}{t}\int_0^t f(X_s)\, ds \xrightarrow{\text{qc}} \bar{f} = \sum_{x \in \mathcal{S}} f(x)\lambda(x) \text{ quando } t \to \infty, \tag{6}$$

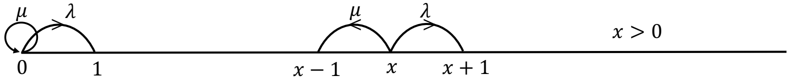
onde λ é a única distribuição invariante para $\mathbf{Q}$.

Exemplo

Em vez de aplicar os resultados acima diretamente, vamos tratar do caso do PNM homogêneo (*fila M/M/1*) por meio de uma relação explícita com o caso discreto, que vale nesse caso (mas não tão simplesmente para o caso não-homogêneo).



Seja agora (Y_n) o PNM em tempo discreto ilustrado a seguir.



Podemos representar (X_t) da seguinte forma. Seja (N_t) um Processo de Poisson de taxa 1, independente de (Y_n).

Fazendo $X_t = Y_{N_t}$, $t \geq 0$, temos que (X_t) é um PNM em tempo contínuo como descrito acima. (Verifique!)

Exemplo (cont.)

Se $\mu > \lambda$, então, como vimos no Exemplo 3 do Álbum 8, Y_n converge em distribuição quando $n \to \infty$ para uma v.a. Y que tem distribuição Geométrica com parâmetro de sucesso $1 - \frac{\lambda}{\mu}$.*

Como $N_t \to \infty$ quando $t \to \infty$ quase certamente, segue que $X_t \Rightarrow Y$ quando $t \to \infty$, onde $\Rightarrow$ indica convergência em distribuição.

Logo, a distribuição Geométrica com parâmetro de sucesso $1 - \frac{\lambda}{\mu}$ é invariante para (X_t). A conclusão do Teorema 4 vale com

$$\lambda_y = \mathbb{P}(Y = y) = \left(1 - \tfrac{\lambda}{\mu}\right)\left(\tfrac{\lambda}{\mu}\right)^y, \; y \geq 0.$$

*Resultado que não depende da distribuição de X_0.